

Zestaw powtórkowy: Trójkąty, algebra i fundamenty trygonometrii

Poziom: Przygotowanie do trygonometrii

Część 1: Działania na liczbach, ułamkach i pierwiastkach

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia, sprowadzając wynik do najprostszej postaci (pojedynczy ułamek nieskracalny):

a) $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8$

b) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

Zadanie 2. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{50}$

c) $\sqrt{72}$

Zadanie 3. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

Część 2: Kąty w trójkącie i klasyfikacja trójkątów

Zadanie 4. W trójkącie kąty mają miary: α , $\alpha + 20^\circ$ oraz 3α .

a) Wyznacz miary wszystkich kątów tego trójkąta.

b) Określ, czy jest to trójkąt ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.

Zadanie 5. W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 120° . Ile wynoszą miary kątów przy podstawie tego trójkąta?

Zadanie 6. Sprawdź, czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt (nierówność trójkąta):

a) 3 cm, 4 cm, 8 cm

b) 5 cm, 7 cm, 11 cm

Zadanie 7. Kąt przyległy do kąta o mierze 135° ma miarę α .

- a) Oblicz miarę kąta α .
- b) Korzystając z tożsamości $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, zapisz $\sin 135^\circ$ za pomocą sinusa kąta ostrego.

Część 3: Twierdzenie Pitagorasa i trójkąt prostokątny

Zadanie 8. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $a = 6$ oraz $b = 8$. Oblicz długość przeciwprostokątnej c .

Zadanie 9. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 13, a jedna z przyprostokątnych ma długość 5. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

Zadanie 10. Sprawdź (za pomocą twierdzenia odwrotnego do tw. Pitagorasa), czy trójkąt o bokach długości:

- a) 5, 12, 13 jest prostokątny,
- b) 4, 6, 8 jest prostokątny.

Zadanie 11. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $a = 12$, a ramię $b = 10$. Oblicz wysokość h opuszczoną na podstawę.

Część 4: Trójkąty szczególne ($30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ oraz $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$)

Zadanie 12. W trójkącie prostokątnym o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ przyprostokątna ma długość $a = 5$.

- a) Oblicz długość przeciwprostokątnej c .
- b) Ile wynosiłaby przyprostokątna, gdyby przeciwprostokątna miała długość $c = 8$?

Zadanie 13. W trójkącie prostokątnym o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ najkrótszy bok (naprzeciwko kąta 30°) ma długość $a = 4$. Oblicz długości pozostałych dwóch boków.

Zadanie 14. W trójkącie prostokątnym o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ przeciwprostokątna ma długość $c = 10$. Oblicz długości obu przyprostokątnych.

Zadanie 15. Dany jest trójkąt równoboczny o boku długości $a = 6$.

- a) Oblicz wysokość h tego trójkąta (ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$).
- b) Oblicz jego pole (ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$).

Część 5: Pole trójkąta i most do trygonometrii

Zadanie 16. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa ma długość $a = 14$ cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę wynosi $h = 5$ cm.

Zadanie 17. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości $a = 7$ i $b = 24$.

- a) Oblicz pole tego trójkąta.
- b) Oblicz długość przeciwprostokątnej c .
- c) Wyznacz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną c .

Zadanie 18. Pamiętając, że $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, oblicz pole trójkąta o bokach $a = 8$ i $b = 10$, jeśli kąt między nimi wynosi:

a) $\alpha = 30^\circ$

b) $\alpha = 60^\circ$

Wskazówka: Zastosuj wzór $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

Zadanie 19. Wiadomo, że dla kątów rozwartych zachodzi wzór redukcyjny: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

a) Oblicz $\sin 120^\circ$ wiedząc, że $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$.

b) Oblicz $\sin 150^\circ$ wiedząc, że $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$.

Zadanie 20. Oblicz pole trójkąta o bokach długości $a = 6\sqrt{3}$ i $b = 8$, w którym kąt między tymi bokami ma miarę $\alpha = 150^\circ$.