

Kompendium Wiedzy: Potęgi, Logarytmy oraz Funkcje Wykładnicza i Logarytmiczna

Materiał powtórkowy z zadaniami i rozwiązaniami

Niniejsze opracowanie stanowi uporządkowane podsumowanie własności potęg i logarytmów, przechodząc od elementarnych przekształceń algebraicznych, przez własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej, aż po metody rozwiązywania zaawansowanych równań i nierówności. Na końcu dokumentu znajduje się zestaw zadań do samodzielnej pracy wraz z odpowiedziami.

1 Potęgi i ich własności

Potęgowanie jest uogólnieniem wielokrotnego mnożenia elementu przez samego siebie, rozszerzonym na wykładniki całkowite, wymierne oraz rzeczywiste.

1.1 Definicje dla różnych wykładników

Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $n, m \in \mathbb{N}_+$. Wówczas definiujemy kolejno:

- **Wykładnik naturalny:** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$ oraz $a^0 = 1$ (dla $a \neq 0$).

- **Wykładnik całkowity ujemny:** Dla $a \neq 0$ przyjmujemy:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

- **Wykładnik wymierny:** Dla $a \geq 0$ (lub $a > 0$, gdy wykładnik jest ujemny):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

1.2 Prawa działań na potęgach

Dla dowolnych podstaw $a > 0, b > 0$ oraz dowolnych wykładników rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące tożsamości:

1.3 Przykłady prostych obliczeń potęgowych

1. **Sprowadzanie do wspólnej podstawy:**

$$\frac{8^3 \cdot 4^{-2}}{16^{-1}} = \frac{(2^3)^3 \cdot (2^2)^{-2}}{(2^4)^{-1}} = \frac{2^9 \cdot 2^{-4}}{2^{-4}} = 2^{9+(-4)-(-4)} = 2^9 = 512$$

2. **Wylączanie wspólnego czynnika przed nawias (przy dodawaniu i odejmowaniu potęg):**

$$3^{12} + 3^{11} - 2 \cdot 3^{10} = 3^{10} \cdot (3^2 + 3^1 - 2) = 3^{10} \cdot (9 + 3 - 2) = 10 \cdot 3^{10}$$

Nazwa prawa	Wzór algebraiczny	Przykład zastosowania
Iloczyn potęg o tej samej podstawie	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^{1,5} = 2^{4,5}$
Iloraz potęg o tej samej podstawie	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{5^4}{5^{-2}} = 5^{4-(-2)} = 5^6$
Potęga potęgi	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$
Potęga iloczynu	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$
Potęga ilorazu	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

3. Potęgi o wykładniku ułamkowym:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2 Logarytmy i ich własności

2.1 Definicja i warunki istnienia logarytmu

Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy taki wykładnik c , do którego należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b :

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Kluczowe założenia (dziedzina logarytmu): Wyrażenie $\log_a b$ ma sens liczbowy wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki:

$$1^\circ \quad a > 0 \qquad 2^\circ \quad a \neq 1 \qquad 3^\circ \quad b > 0$$

Uwaga notacyjna: Zapis $\log x$ (lub $\lg x$) oznacza logarytm dziesiętny ($\log_{10} x$), natomiast zapis $\ln x$ oznacza logarytm naturalny o podstawie $e \approx 2,71828$ ($\log_e x$).

2.2 Podstawowe tożsamości i prawa działań na logarytmach

Przy założeniu, że $a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1$ oraz $x > 0, y > 0$ i $r \in \mathbb{R}$, prawdziwe są wzory:

- **Jedynka i podstawa:** $\log_a 1 = 0$ oraz $\log_a a = 1$, a ogólniej $\log_a(a^r) = r$.
- **Tożsamość potęgowo-logarytmiczna:** $a^{\log_a x} = x$.
- **Logarytm iloczynu:** $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
- **Logarytm ilorazu:** $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
- **Logarytm potęgi:** $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$.
- **Potęga w podstawie logarytmu:** $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$ (dla $k \neq 0$).
- **Wzór na zamianę podstawy logarytmu:**

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} \quad \text{Skutek szczególny (dla } c = x \neq 1): \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

2.3 Przykłady prostych obliczeń logarytmicznych

1. **Obliczanie z definicji przez zamianę na równanie wykładnicze:** Oblicz $\log_{\sqrt{2}} 8$. Niech $\log_{\sqrt{2}} 8 = x$. Wtedy $(\sqrt{2})^x = 8 \implies (2^{\frac{1}{2}})^x = 2^3 \implies 2^{\frac{1}{2}x} = 2^3 \implies \frac{1}{2}x = 3 \implies x = 6$.

2. **Łączenie logarytmów o tej samej podstawie:**

$$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3(6^2) - \log_3 4 = \log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \left(\frac{36}{4}\right) = \log_3 9 = 2$$

3. **Wykładnik zawierający logarytm:**

$$25^{1-\log_5 3} = (5^2)^{1-\log_5 3} = \frac{(5^2)^1}{(5^2)^{\log_5 3}} = \frac{25}{5^{2\log_5 3}} = \frac{25}{5^{\log_5(3^2)}} = \frac{25}{9}$$

3 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ oraz funkcja logarytmiczna $g(x) = \log_a x$ (gdzie $a > 0, a \neq 1$) są względem siebie **funkcjami odwrotnymi**. Ich wykresy są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

Cecha funkcji	Funkcja $f(x) = a^x$	wykładnicza	Funkcja $g(x) = \log_a x$	logarytmiczna
Dziedzina (D)	$D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$		$D = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$	
Zbiór wartości (ZW)	$ZW = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$		$ZW = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	
Monotoniczność	- Rosnąca dla $a \in (1, +\infty)$ - Malejąca dla $a \in (0, 1)$		- Rosnąca dla $a \in (1, +\infty)$ - Malejąca dla $a \in (0, 1)$	
Punkty charakterystyczne	$(0, 1)$ oraz $(1, a)$		$(1, 0)$ oraz $(a, 1)$	
Miejsca zerowe	Brak ($a^x > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$)		Jedno miejsce zerowe: $x_0 = 1$	
Asymptota wykresu	Pozioma: oś OX (prosta $y = 0$)		Pionowa: oś OY (prosta $x = 0$)	
Różnowartościowość	Tak: $a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$		Tak: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2$	

3.1 Wpływ podstawy a na rozwiązywanie nierówności

Różnowartościowość obu funkcji pozwala na opuszczanie podstaw w równaniach, natomiast monotoniczność determinuje zwrot znaku nierówności przy opuszczaniu podstawy:

- Jeżeli **$a > 1$** (funkcje są rosnące), przy opuszczaniu podstawy **zachowujemy** zwrot nierówności:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x) \quad \text{oraz} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) > g(x)$$

- Jeżeli **$a \in (0, 1)$** (funkcje są malejące), przy opuszczaniu podstawy **zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny**:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x) \quad \text{oraz} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) < g(x)$$

Pamiętaj: W nierównościach logarytmicznych wynik musi zostać skonfrontowany z dziedziną ($f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$).

4 Przykłady rozwiązywania trudniejszych zadań

Przykład 1: Równanie logarytmiczne ze zmienną w argumentach

Zadanie: Rozwiąż równanie $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$.

Rozwiązanie:

1. **Krok 1 (Dziedzina równania):** Wszystkie argumenty logarytmów muszą być dodatnie:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \implies x > 1 \\ x+2 > 0 \implies x > -2 \end{cases} \implies \text{część wspólna: } D = (1, +\infty)$$

2. **Krok 2 (Przekształcenie równania):** Korzystamy ze wzoru na sumę logarytmów po lewej stronie, a prawą stronę zapisujemy jako logarytm o podstawie 2 ($2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$):

$$\log_2 [(x-1)(x+2)] = \log_2 4$$

3. **Krok 3 (Opuszczenie logarytmów i rozwiązanie równania kwadratowego):** Z równoważności funkcji $\log_2$:

$$(x-1)(x+2) = 4 \implies x^2 + x - 2 = 4 \implies x^2 + x - 6 = 0$$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$. Pierwiastki to:

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

4. **Krok 4 (Weryfikacja z dziedziną):** Ponieważ $D = (1, +\infty)$, odrzucamy rozwiązanie $x_1 = -3 \notin D$. Rozwiązanie $x_2 = 2 \in D$.

Odpowiedź: $x = 2$.

Przykład 2: Równanie wykorzystujące wzór na zamianę podstawy logarytmu

Zadanie: Rozwiąż równanie $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$.

Rozwiązanie:

1. **Dziedzina:** $x > 0$, czyli $D = (0, +\infty)$.

2. **Sprowadzenie do wspólnej podstawy 2:** Korzystamy z własności $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$:

$$\log_4 x = \log_{2^2} x = \frac{1}{2} \log_2 x \quad \text{oraz} \quad \log_{16} x = \log_{2^4} x = \frac{1}{4} \log_2 x$$

3. **Podstawienie do równania:**

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x = 7 \implies \frac{7}{4} \log_2 x = 7 \quad \Bigg| \cdot \frac{4}{7}$$

$$\log_2 x = 4 \implies x = 2^4 = 16$$

Rozwiązanie $x = 16$ należy do dziedziny $D = (0, +\infty)$.

Odpowiedź: $x = 16$.

Przykład 3: Równanie ze zmienną pomocniczą i niewiadomą w podstawie

Zadanie: Rozwiąż równanie $\log_3 x - 2 \log_x 3 = 1$.

Rozwiązanie:

1. **Dziedzina:** Liczba x występuje zarówno w argumencie, jak i w podstawie logarytmu, zatem:

$$x > 0 \quad \wedge \quad x \neq 1 \implies D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

2. **Zamiana podstawy i podstawienie:** Ponieważ $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, równanie przyjmuje postać:

$$\log_3 x - \frac{2}{\log_3 x} = 1$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = \log_3 x$ (gdzie $t \neq 0$, co wynika z $x \neq 1$):

$$t - \frac{2}{t} = 1 \quad | \cdot t \implies t^2 - t - 2 = 0 \implies (t - 2)(t + 1) = 0$$

Stąd otrzymujemy $t_1 = 2$ lub $t_2 = -1$.

3. **Powrót do niewiadomej x :**

$$\log_3 x = 2 \implies x = 3^2 = 9 \quad \text{lub} \quad \log_3 x = -1 \implies x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Obie wartości należą do wyznaczonej dziedziny.

Odpowiedź: $x \in \{\frac{1}{3}, 9\}$.

Przykład 4: Nierówność logarytmiczna o podstawie $a \in (0, 1)$

Zadanie: Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) \geq -1$.

Rozwiązanie:

1. **Dziedzina nierówności:** Wyrażenie logarytmowane musi być dodatnie:

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \implies (x - 1)(x - 3) > 0$$

Ramiona paraboli są skierowane w górę, więc dziedzina to: $D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

2. **Rozwiązanie nierówności głównej:** Zapisujemy $-1 = \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{-1} = \log_{\frac{1}{3}} 3$:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3$$

Ponieważ podstawa $a = \frac{1}{3} \in (0, 1)$, funkcja logarytmiczna jest **malejąca** – opuszczając logarytm, **zmieniamy znak nierówności**:

$$x^2 - 4x + 3 \leq 3 \implies x^2 - 4x \leq 0 \implies x(x - 4) \leq 0 \implies x \in \langle 0, 4 \rangle$$

3. **Wyznaczenie części wspólnej z dziedziną D :**

$$x \in \langle 0, 4 \rangle \cap ((-\infty, 1) \cup (3, +\infty)) \implies x \in \langle 0, 1 \rangle \cup (3, 4)$$

Odpowiedź: $x \in \langle 0, 1 \rangle \cup (3, 4)$.

Przykład 5: Równanie potęgowe z logarytmem w wykładniku

Zadanie: Rozwiąż równanie $x^{\log_2 x - 3} = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie:

1. **Dziedzina:** $x > 0$, czyli $D = (0, +\infty)$.

2. **Obustronne logarytmowanie:** Ponieważ obie strony równania są dodatnie, logarytmujemy równanie obustronnie przy podstawie 2:

$$\log_2 \left(x^{\log_2 x - 3} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{4} \right)$$

Korzystając z prawa $\log_a(b^r) = r \log_a b$, przenosimy wykładnik przed logarytm:

$$(\log_2 x - 3) \cdot \log_2 x = -2$$

3. **Podstawienie** $t = \log_2 x$:

$$(t - 3)t = -2 \implies t^2 - 3t + 2 = 0 \implies (t - 1)(t - 2) = 0 \implies t_1 = 1 \vee t_2 = 2$$

4. **Powrót do zmiennej** x :

$$\log_2 x = 1 \implies x = 2^1 = 2 \quad \vee \quad \log_2 x = 2 \implies x = 2^2 = 4$$

Odpowiedź: $x \in \{2, 4\}$.

5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiąż poniższe zadania, pamiętając o wyznaczeniu dziedziny w każdym równaniu i nierówności logarytmicznej. W nawiasach kwadratowych podano poprawne odpowiedzi do samokontroli.

Część A: Obliczanie wartości wyrażeń potęgowych i logarytmicznych

- Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{27^2 \cdot 9^{-4}}{81^{-1}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$. **[Odp: 9]**
- Oblicz wartość wyrażenia: $\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 9 + \log_2 \frac{1}{2}$. **[Odp: 2]**
- Oblicz wartość wyrażenia: $\log_3 5 \cdot \log_5 9 - \log_{\sqrt{3}} 27$. **[Odp: -4]**
- Oblicz wartość wyrażenia: $4^{\log_2 5 - \frac{1}{2}} + 9^{\log_3 \sqrt{2}}$. **[Odp: 14, 5]**
- Wiedząc, że $\log_3 2 = a$ oraz $\log_3 5 = b$, wyraż za pomocą a i b liczbę $\log_3 60$. **[Odp: $2a + b + 1$]**

Część B: Własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej

- Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem: $f(x) = \log_{x-2}(16 - x^2)$. **[Odp: $D = (2, 3) \cup (3, 4)$]**
- Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $P = (-2, 9)$. Wyznacz podstawę a , określ monotoniczność funkcji f oraz oblicz argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość $\frac{1}{27}$. **[Odp: $a = \frac{1}{3}$, funkcja malejąca, dla $x = 3$]**
- Funkcja $g(x) = \log_2(x + m) + k$ ma asymptotę pionową o równaniu $x = -4$ oraz miejsce zerowe $x_0 = 4$. Wyznacz parametry m oraz k . **[Odp: $m = 4$, $k = -3$]**

Część C: Równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne

9. Rozwiąż równanie wykładnicze: $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$. **[Odp: $x \in \{1, 2\}$]**
10. Rozwiąż nierówność wykładniczą: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-3x} < \frac{25}{4}$. **[Odp: $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$]**
11. Rozwiąż równanie logarytmiczne: $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 1$. **[Odp: $x = 2$]**
12. Rozwiąż równanie z zamianą podstawy: $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{3}$. **[Odp: $x = 9$]**
13. Rozwiąż równanie ze zmienną pomocniczą: $\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 4 = 0$. **[Odp: $x \in \{\frac{1}{2}, 16\}$]**
14. Rozwiąż równanie: $\log_4 x + \frac{3}{\log_4 x} = 4$. **[Odp: $x \in \{4, 64\}$]**
15. Rozwiąż nierówność logarytmiczną: $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$. **[Odp: $x \in (3, 4]$]**
16. Rozwiąż nierówność logarytmiczną: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$. **[Odp: $x \in (2, 5)$]**
17. Rozwiąż równanie potęgowo-logarytmiczne: $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$. **[Odp: $x \in \{3, 27\}$]**