

Podsumowanie: Rozwiązywanie równań wielomianowych

Głównym celem przy rozwiązywaniu równań wielomianowych jest doprowadzenie ich do postaci iloczynowej, czyli takiej, w której po jednej stronie mamy mnożenie nawiasów, a po drugiej zero. Wykorzystujemy tu prostą zasadę: iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy zero.

1 Równania liniowe

Najprostsza postać równania, gdzie niewiadoma występuje w pierwszej potęgze.

Postać: $ax + b = 0$

Dążymy do wyznaczenia x , przenosząc niewiadome na jedną stronę, a wiadome na drugą.

Przykład:

$$\begin{aligned}3x - 12 &= 0 \\3x &= 12 \quad | : 3 \\x &= 4\end{aligned}$$

2 Funkcja kwadratowa

Funkcję kwadratową możemy zapisać w trzech postaciach:

1. **Ogólna:** $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. **Kanoniczna:** $f(x) = a(x - p)^2 + q$ (gdzie p i q to współrzędne wierzchołka: $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$)
3. **Iloczynowa:** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (gdzie x_1, x_2 to miejsca zerowe, o ile istnieją)

Zanim zaczniemy liczyć deltę (Δ), warto sprawdzić, czy któryś ze współczynników nie jest równy zero:

- **Gdy $a = 0$:** Równanie przestaje być kwadratowe i staje się **liniowe** ($bx + c = 0$).
- **Gdy $b = 0$:** Nie ma środkowego wyrazu. Wystarczy przenieść liczbę na drugą stronę i **spierwiastkować**.

$$\begin{aligned}2x^2 - 18 &= 0 \\2x^2 &= 18 \\x^2 = 9 &\implies x = 3 \vee x = -3\end{aligned}$$

- **Gdy $c = 0$:** Brakuje wyrazu wolnego. Najszybszą metodą jest **wyciągnięcie x przed nawias**.

$$5x^2 - 15x = 0$$

$$5x(x - 3) = 0$$

$$5x = 0 \vee x - 3 = 0 \implies x = 0 \vee x = 3$$

- **Gdy $a, b, c \neq 0$:** Stosujemy **delte**. Wzór: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \implies \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

3 Równania wielomianowe wyższych stopni

W przypadku wyższych potęg stosujemy metody krokowe, od najprostszych do najbardziej zaawansowanych.

3.1 Wyciąganie najniższej potęgi x przed nawias

Jeśli każdy wyraz ma x , wyciągamy przed nawias x w najniższej potędze. W nawiasie zostaje nam zazwyczaj równanie kwadratowe lub liniowe. **Przykład:**

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

Mamy dwa czynniki: 1) $x^2 = 0 \implies x = 0$ (pierwiastek dwukrotny)

2) $x^2 - 4 = 0 \implies x = 2 \vee x = -2$

3.2 Metoda grupowania („podwójne wyciąganie”)

Gdy mamy 4 wyrazy, dzielimy je w pary i wyciągamy wspólny czynnik z każdej pary osobno, tak aby w obu nawiasach zostało to samo. Następnie wyciągamy cały ten nawias, zamykając w drugim wszystko to, co stało przed nimi. **Przykład:**

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$x^2(x - 2) - 9(x - 2) = 0$$

$$(x^2 - 9)(x - 2) = 0$$

Rozkładamy dalej ze wzoru skróconego mnożenia:

$$(x - 3)(x + 3)(x - 2) = 0 \implies x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2$$

3.3 Zgadywanie pierwiastka i dzielenie wielomianów

Jeśli metody powyżej zawodzą, szukamy dzielników wyrazu wolnego. Zgadujemy jeden z nich, podstawiając do równania. Jeśli wyjdzie 0, mamy nasz pierwiastek a , a wielomian dzieli się bez reszty przez dwumian $(x - a)$.

Przykład: $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. Szukamy dzielników 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Sprawdzamy $x = -1$:

$W(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$.
Znaleźliśmy pierwiastek! Teraz dzielimy $W(x)$ przez $(x + 1)$.

Dzielenie pisemne:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^2 - 5x + 6 \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 -5x^2 + x \\
 \underline{-(-5x^2 - 5x)} \\
 6x + 6 \\
 \underline{-(6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Schemat Hornera (szybsza metoda w tabeli):

Zapisujemy współczynniki wielomianu. W lewym dolnym rogu nasz odgadnięty pierwiastek (-1) .

Wartość x	x^3 (1)	x^2 (-4)	x^1 (1)	x^0 (6)
	1	-4	1	6
-1	1	$(-1 \cdot 1) - 4 = -5$	$(-1 \cdot -5) + 1 = 6$	$(-1 \cdot 6) + 6 = 0$ (Reszta)

Wynik dzielenia to wielomian o stopień niższy: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Teraz liczymy z tego normalnie deltę (wyszłyby $x = 2$ i $x = 3$). Ostateczne rozwiązania to $\{-1, 2, 3\}$.

4 Szkicowanie wykresu wielomianu (wężyk znaków)

Gdy mamy wyznaczone wszystkie miejsca zerowe, zaznaczamy je na osi liczbowej.

1. **Prawa strona:** Patrzymy na znak współczynnika kierunkowego a (liczba stojąca przy najwyższej potędze x).

- Jeśli $a > 0$, zaczynamy rysować od prawej strony z **góry** (nad osią).
- Jeśli $a < 0$, zaczynamy rysować od prawej strony z **dołu** (pod osią).

2. **Krotność pierwiastków:**

- **Nieparzysta** (np. nawias jest w pierwszej potędze lub trzeciej): wykres **przecina** oś w tym punkcie.
- **Parzysta** (np. nawias jest podniesiony do kwadratu, np. $(x - 2)^2$): wykres **odbija się** od osi w tym punkcie.

5 Lista zadań do przećwiczenia

1. **Równanie z $b = 0$ i $c = 0$:** Rozwiąż $3x^2 - 27 = 0$ oraz $4x^2 + 16x = 0$.
2. **Delta:** Rozwiąż $2x^2 - 7x + 3 = 0$.
3. **Wspólny czynnik:** Wyciągnij najniższą potęgę i rozwiąż: $x^5 - 9x^3 = 0$.
4. **Grupowanie:** Rozwiąż $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

5. **Dzielenie:** Zgadnij pierwszy pierwiastek i podziel (Hornerem lub pisemnie): $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
6. **Wykres:** Narysuj siatkę znaków dla wielomianu $W(x) = -(x-1)^2(x+2)(x-4)^3$. Skąd zaczniesz rysować i w którym miejscu wykres odbije się od osi?