

Kompendium Trygonometrii: Kąty Rozwarte, Metody Redukcji i Równania Trygonometryczne

Materiał dydaktyczny – podsumowanie metod i zadań

1 Podstawy: Od kąta ostrego do kąta rozwartego

W trójkącie prostokątnym funkcje trygonometryczne kąta ostrego $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ definiujemy jako stosunki długości odpowiednich boków:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (\text{przyprostokątna naprzeciwko do przeciwprostokątnej})$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (\text{przyprostokątna przy kącie do przeciwprostokątnej})$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad (\text{przyprostokątna naprzeciwko do przyprostokątnej przy kącie})$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (\text{przyprostokątna przy kącie do przyprostokątnej naprzeciwko})$$

Gdy przechodzimy do **kątów rozwartych** $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ lub dowolnych kątów skierowanych, umieszczamy kąt w układzie współrzędnych (x, y) . Wierzchołek kąta leży w punkcie $(0, 0)$, pierwsze ramię pokrywa się z dodatnią półosią OX , a drugie ramię przechodzi przez punkt $P = (x, y)$ w odpowiedniej ćwiartce układu. Odległość punktu P od początku układu to promień wodzący $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ (odpowiednik przeciwprostokątnej c). Wówczas:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Dla podstawowych kątów ostrych warto pamiętać tablicę wartości, do której sprowadzamy kąty rozwarte:

Kąt α	0°	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje
$\operatorname{ctg} \alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2 Metoda 1: Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają zapisać funkcję trygonometryczną dowolnego kąta (np. rozwartego) za pomocą funkcji kąta ostryego $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$.

Zasada działania wzorów redukcyjnych:

1. **Rozpisanie kąta w postaci $180^\circ \pm \alpha$ lub $360^\circ - \alpha$:** Funkcja **nie zmienia** swojej nazwy (sinus pozostaje sinusem, cosinus pozostaje cosinusem).
2. **Rozpisanie kąta w postaci $90^\circ \pm \alpha$ lub $270^\circ \pm \alpha$:** Funkcja **zmienia nazwę na kofunkcję** ($\sin \leftrightarrow \cos$, $\operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$).
3. **Znak przed wynikiem** zależy od tego, jaki znak miała pierwotna funkcja w ćwiartce, w której leżał wyjściowy kąt.

Dla kątów rozwartych (II ćwiartka, kąt z przedziału $(90^\circ, 180^\circ)$) najwygodniej korzystać ze wzorów dla $180^\circ - \alpha$:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Alternatywnie, używając $90^\circ + \alpha$ (z przejściem na kofunkcję):

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Przykłady zastosowania wzorów redukcyjnych:

- $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (lub: $\sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)
- $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$
- $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ (III ćwiartka)

3 Metoda 2: Tabela znaków funkcji w ćwiartkach

Zamiast uczyć się na pamięć kilkudziesięciu wzorów, wystarczy określić, w której ćwiartce leży kąt, sprawdzić znak funkcji w tabeli i odjąć kąt od osi poziomej (180° lub 360°).

Funkcja / Ćwiartka	I ćw. ($0^\circ, 90^\circ$)	II ćw. ($90^\circ, 180^\circ$)	III ćw. ($180^\circ, 270^\circ$)	IV ćw. ($270^\circ, 360^\circ$)
$\sin \alpha$ (y/r)	+	+	−	−
$\cos \alpha$ (x/r)	+	−	−	+
$\operatorname{tg} \alpha$ (y/x)	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} \alpha$ (x/y)	+	−	+	−

Wierszyk ułatwiający zapamiętanie, które funkcje są dodatnie w kolejnych ćwiartkach:

„W **pierwszej** wszystkie są dodatnie, w **drugiej** tylko sinus, w **trzeciej** tangens i cotangens, a w **czwartej** cosinus.”

Przykład krok po kroku z tabelą: Oblicz $\cos 210^\circ$.

1. Kąt 210° leży między 180° a 270° , czyli w **III ćwiartce**.
2. Z tabeli odczytujemy znak: dla cosinusa w III ćwiartce jest znak **minus** (–).
3. Odchylenie od osi poziomej (180°) wynosi $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$.
4. Zapisujemy wynik: $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 Metoda 3: Geometryczna metoda trójkąta i „zmiany znaków boków”

Jest to najbardziej intuicyjna metoda wizualna. Zamiast wzorów redukcyjnych rysujemy kąt rozwarty w układzie współrzędnych, dopełniamy go do osi poziomej 180° , tworzymy zwykły trójkąt prostokątny o bokach a, b, c , a następnie nadajemy przyprostokątnym znaki zgodne z osiami układu współrzędnych (w lewo po osi X to znak minus, w górę po osi Y to znak plus). Przeciwprostokątna c (promień) jest **zawsze dodatnia**.

Przykład A: Obliczanie $\sin 150^\circ$ (oraz $\cos 150^\circ$)

Kroki postępowania:

1. **Narysuj kąt 150° :** Zaczynamy od dodatniej półosi OX i obracamy ramię do II ćwiartki.
2. **Dopełnij do 180° na wykresie:** Do pełnego kąta półpełnego (180°) brakuje kąta ostrego 30° . Domykamy trójkąt prostokątny do osi OX .
3. **Zapisz proporcje dla kąta 30° :** Wiemy, że dla zwykłego trójkąta o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{a}{c}$$

Przyjmujemy więc długości boków trójkąta:

$$a = 1 \quad (\text{pionowo}), \quad c = 2 \quad (\text{przeciwprostokątna}), \quad b = \sqrt{3} \quad (\text{poziomo})$$

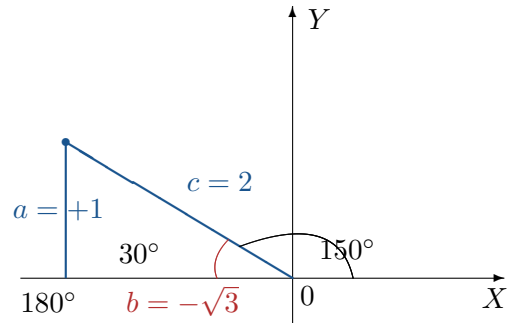
4. **Zmień znaki „długości” boków wg osi:**

- Bok b leży na ujemnej półosi OX (w lewo) $\rightarrow b = -\sqrt{3}$.
- Bok a skierowany jest w górę (dodatnia oś OY) $\rightarrow a = +1$.
- Przeciwprostokątna c jest zawsze dodatnia $\rightarrow c = 2$.

5. **Zapisz ostateczny wynik:**

$$\sin 150^\circ = \frac{a}{c} = \frac{+1}{2} = \frac{1}{2}$$

(Dodatkowo od razu widzimy z rysunku, że $\cos 150^\circ = \frac{b}{c} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).



Rys. 1. Dopełnienie kąta 150° do 180° (trójkąt $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$).

Przykład B: Obliczanie $\cos 135^\circ$ tą samą metodą

Kroki postępowania:

1. **Narysuj kąt 135° :** Ramię kąta trafia dokładnie w środek II ćwiartki.
2. **Dopełnij do 180° na wykresie:** Kąt ostry pomiędzy ramieniem kąta a osią OX wynosi:

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

3. **Zapisz proporcje dla kąta 45° :** Dla trójkąta prostokątnego równoramiennego ($45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$) mamy:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b}{c}$$

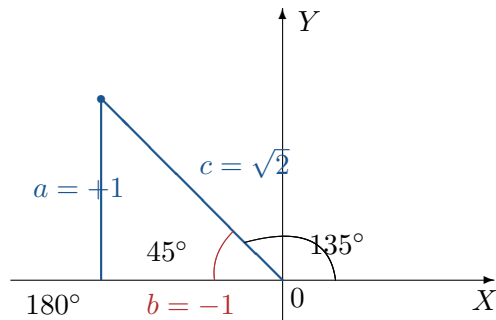
Przyjmujemy bazowe długości boków:
 $a = 1, b = 1, c = \sqrt{2}$ (lub po usunięciu niewymierności: $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 2$).

4. **Zmień znaki „długości” koniecznych boków:**

- Przyprostokątna pozioma b idzie w lewo po osi OX , więc zmieniamy jej znak na ujemny: $\mathbf{b} = -1$ (lub $-\sqrt{2}$).
- Przyprostokątna pionowa a idzie w górę: $a = +1$.
- Przeciwnprostokątna c jest dodatnia: $c = \sqrt{2}$ (lub 2).

5. **Zapisz ostateczny wynik:**

$$\cos 135^\circ = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Rys. 2. Dopełnienie kąta 135° do 180° (trójkąt $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$).

5 Rozwiązywanie równań trygonometrycznych i wyrażeń ze znanymi kątami

W zadaniach szkolnych bardzo często spotykamy dwa typy problemów:

1. **Równania ze stałą wartością kąta rozwartego i niewiadomą x** , np. $x \cdot \sin 150^\circ - 1 = \frac{3}{2}$, albo sprawdzanie tożsamości, gdzie najpierw redukujemy $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.
2. **Klasyczne równania trygonometryczne z niewiadomym kątem x** , np. $2 \sin x - 1 = 0$ lub $\sin x - 1 = -\frac{1}{2}$ (gdzie jednym z rozwiązań jest właśnie $x = 150^\circ$), bądź równania sprzeczne typu $\sin x - 1 = \frac{3}{2}$.

Poniżej szczegółowo rozwiązujemy oba te przypadki wraz z ilustracją na wykresie.

Przykład 1: Równanie z kątem 150° i wyznaczanie kątów z wykresu ($\sin x = \frac{1}{2}$)

Rozważmy równanie prowadzące do kąta 150° :

$$\sin x - 1 = -\frac{1}{2} \quad (\text{lub równoważnie po przeniesieniu jedynki: } \sin x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$$

(Uwaga: Gdybyśmy mieli wyrażenie z gotowym kątem $x - (\sin 150^\circ - 1) = \frac{3}{2}$, to podstawiając obliczone wcześniej $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, otrzymujemy $x - (\frac{1}{2} - 1) = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$).

Rozwiążmy pełne równanie trygonometryczne $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $x \in [0^\circ, 360^\circ]$ oraz w zbiorze liczb rzeczywistych:

1. **Krok 1 (Kąt bazowy z I ćwiartki):** Szukamy w tablicach kąta ostrego α_0 , dla którego $\sin \alpha_0 = \frac{1}{2}$. Jest to:

$$x_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

2. **Krok 2 (Symetria wykresu – II ćwiartka):** Ponieważ funkcja sinus jest dodatnia również w II ćwiartce (dopełnienie do 180°), drugie rozwiązanie w przedziale $[0^\circ, 360^\circ]$ wynosi:

$$x_2 = 180^\circ - 30^\circ = \mathbf{150^\circ} = \frac{5\pi}{6}$$

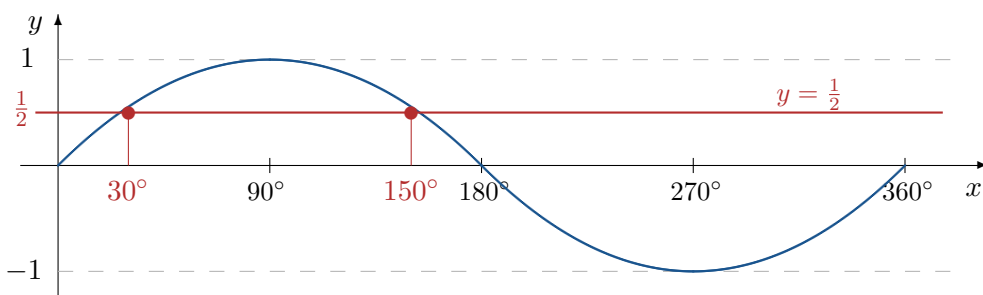
(Sprawdzenie wstawiając 150° do lewej strony równania: $\sin 150^\circ - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, lewa strona równa się prawej).

3. **Krok 3 (Uwzględnienie okresowości $360^\circ = 2\pi$):** Dopisujemy pełne okresy $2k\pi$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$):

$$\mathbf{x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

W mierze łukowej (radianach): $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Przedstawienie rozwiązania na wykresie funkcji $y = \sin x$: Rysujemy sinusoidę $y = \sin x$ oraz poziomą prostą $y = \frac{1}{2}$. Punkty przecięcia wyznaczają szukane kąty 30° oraz 150° .



Rys. 3. Interpretacja graficzna równania $\sin x = \frac{1}{2}$ (rozwiązania $x_1 = 30^\circ$ oraz $x_2 = 150^\circ$).

Przykład 2: Analiza równania typu $\sin x - 1 = \frac{3}{2}$ (badanie zbioru wartości)

Sprawdźmy teraz dokładnie równanie o postaci podanej w treści:

$$\sin x - 1 = \frac{3}{2}$$

Przenosimy -1 na prawą stronę równania (zmieniając znak na przeciwny):

$$\sin x = \frac{3}{2} + 1 \implies \sin x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Wniosek i interpretacja na wykresie: Zbiór wartości funkcji sinus i cosinus jest ograniczony do przedziału $[-1, 1]$, czyli dla każdego kąta $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $-1 \leq \sin x \leq 1$. Ponieważ $\frac{5}{2} = 2,5 > 1$, prosta pozioma $y = 2,5$ leży całkowicie **powyżej** wykresu sinusoidy i nie ma z nią żadnych punktów wspólnych.

- Równanie $\sin x - 1 = \frac{3}{2}$ jest **równaniem sprzecznym**: $x \in \emptyset$ (brak rozwiązań).
- Podobnie spreczny jest zapis arytmetyczny $\sin 150^\circ - 1 = \frac{3}{2}$, ponieważ $L = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$.
- Aby równanie z wyrażeniem $\frac{3}{2}$ po prawej stronie miało rozwiązanie, musi mieć postać np. $2 \sin x + 1 = 0$ lub $2 - \sin x = \frac{3}{2}$ (wtedy $-\sin x = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$, co daje dokładnie wykres z Rysunku 3 i kąt 150°).

Przykład 3: Równanie z cosinusem i kątem rozwartym 135° : $\sqrt{2} \cos x + 1 = 0$

Przekształcamy równanie do postaci elementarnej:

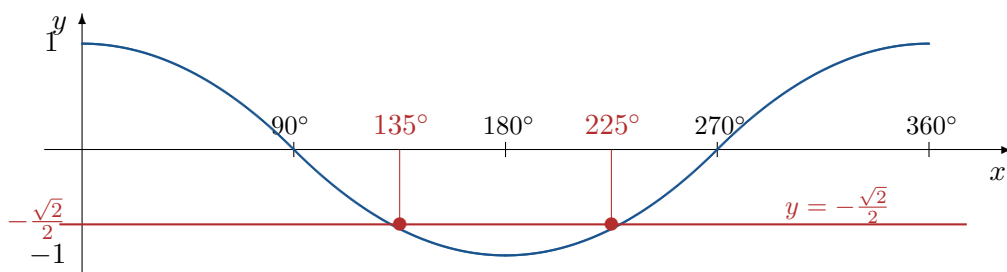
$$\sqrt{2} \cos x = -1 \quad / : \sqrt{2} \implies \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. Dla wartości dodatniej $\frac{\sqrt{2}}{2}$ kątem ostrym jest $\alpha_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.

2. Ponieważ $\cos x < 0$, szukamy kątów w **II oraz III ćwiartce**:

$$x_1 = 180^\circ - 45^\circ = \mathbf{135^\circ} = \frac{3\pi}{4}, \quad x_2 = 180^\circ + 45^\circ = \mathbf{225^\circ} = \frac{5\pi}{4}$$

3. Zapisujemy pełną odpowiedź z okresem: $x = \pm 135^\circ + k \cdot 360^\circ$ (czyli $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



Rys. 4. Interpretacja graficzna równania $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $[0^\circ, 360^\circ]$.

6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiąż poniższe zadania, korzystając z metody trójkąta prostokątnego ze zmianą znaków boków, wzorów redukcyjnych oraz wykresów funkcji trygonometrycznych. W nawiasach podano ostateczne wyniki do samokontroli.

Część A: Obliczanie wartości dla kątów rozwartych i skierowanych

1. Narysuj w układzie współrzędnych kąt 120° , dopełnij go do 180° i wyznacz ze znaków boków trójkąta wartość $\sin 120^\circ$ oraz $\cos 120^\circ$. **(Odp.: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$)**
2. Korzystając z tabeli znaków i wzorów redukcyjnych, oblicz dokładną wartość wyrażenia: $\operatorname{tg} 150^\circ + \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ$. **(Odp.: $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}-3}{6}$)**
3. Oblicz wartość wyrażenia: $2 \sin 150^\circ - 4 \cos 120^\circ + \operatorname{tg}^2 135^\circ$. **(Odp.: 4)**
4. Wyznacz wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta $\alpha = 210^\circ$ (III ćwiartka). **(Odp.: $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 210^\circ = \sqrt{3}$)**
5. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\sin 150^\circ - \cos 120^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ + 2}$. **(Odp.: 1)**

Część B: Równania trygonometryczne (podaj rozwiązania w przedziale $x \in [0^\circ, 360^\circ]$)

6. Rozwiąż równanie i zilustruj je na wykresie: $2 \cos x - 1 = 0$. **(Odp.: $x = 60^\circ \vee x = 300^\circ$)**
7. Rozwiąż równanie: $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$. **(Odp.: $x = 240^\circ \vee x = 300^\circ$)**
8. Rozwiąż równanie z kątem rozwartym w wyniku: $\frac{3}{2} - \cos x = 2$. **(Odp.: $x = 120^\circ \vee x = 240^\circ$)**
9. Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ w przedziale $[0^\circ, 360^\circ]$. **(Odp.: $x = 135^\circ \vee x = 315^\circ$)**
10. Rozwiąż równanie z wartością kąta rozwartego: $2x \cdot \sin 150^\circ - \cos 180^\circ = \frac{5}{2}$. **(Odp.: $x = \frac{3}{2}$)**
11. Rozwiąż równanie kwadratowe względem sinusa: $2 \sin^2 x - \sin x = 0$. **(Odp.: $x \in \{0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$)**
12. Zbadaj liczbę rozwiązań równania: $\cos x + 2 = \frac{1}{2}$. **(Odp.: Brak rozwiązań, $x \in \emptyset$, bo $\cos x = -\frac{3}{2} < -1$)**